Prof. Dr. G. Böckle
Institut für Experimentelle Mathematik
Ellernstr. 29
la@iem.uni-due.de
http://www.iem.uni-due.de/∼la

ÜBUNGSBLATT NR. 11 LINEARE ALGEBRA I

Aufgaben für die Übungsgruppen

Aufgabe Ü28 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ beliebig. Sei $f : V_n(K) \longrightarrow V_n(K),\ x \mapsto Ax$. Man zeige:
a) f ist genau dann diagonalisierbar, wenn ein $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert so dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.
b) f ist genau dann triangonalisierbar, wenn ein $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert so dass $C^{-1}AC$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe Ü29 Sei K ein Körper und sei $f : V_3(K) \longrightarrow V_3(K),\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$
Man zeige:
a) $P_f(T) = (T-1)^3$
b) $\dim(V_1(f)) = 1$
c) f ist nicht diagonalisierbar.

Aufgabe Ü30 Man zeige, dass $\overline{} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : a + b\mathbf{i} \mapsto \overline{a+b\mathbf{i}} := a - b\mathbf{i}$ ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist und dass $\{z \in \mathbb{C} | z = \overline{z}\} = \mathbb{R}$ gilt.

Schriftliche Hausaufgaben

Abgabe. Bis Donnerstag, **20.1.**, 13 Uhr, gegenüber dem Dekanat Mathematik.

Besprechung. H41 und H42 werden in den Globalübungen am 24.1. besprochen.

Aufgabe H39 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}) := \{(a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Q}) |\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} : a_{i,j} \in \mathbb{Z}\}$.
Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$. Man zeige:
a) $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
b) $\mathrm{Adj}(A) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$.
c) Gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ mit $A \cdot B = 1_n$, so gilt $\det(A) = \pm 1$.
d) Gilt $\det(A) = \pm 1$, so liegt A^{-1} in $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$.

Aufgabe H40 Sei K ein Körper und seien $m, l \in \mathbb{N}$ mit $m, l \geq 1$. Sei $n := m + l$. Seien $A \in \mathcal{M}_{m,m}(K), B \in \mathcal{M}_{m,l}(K), D \in \mathcal{M}_{l,l}(K)$ und $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$.
Man zeige:
a) $\mathrm{Rang}(D) < l \Longrightarrow \mathrm{Rang}(\mathcal{A}) < n$.
b) Gilt $\mathrm{Rang}(D) = l$, so gelten:
i) $D \in \mathrm{GL}_l(K)$.
ii) $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BD^{-1} \\ 0 & 1_l \end{pmatrix}$.
iii) $\det(\begin{pmatrix} A & BD^{-1} \\ 0 & 1_l \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_l \end{pmatrix})$.
iv) $\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_l \end{pmatrix}) = \det(A)$, $\det(\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}) = \det(D^{-1})$
c) $\det(\mathcal{A}) = \det(A) \cdot \det(D)$.

Hinweis zu b) iii). Man verwende elementare Zeilenumformungen.
Hinweis zu b) iv). Man verwende den Entwicklungssatz von Laplace.
Hinweis zu c). Man verwende a) und b).

Aufgabe H41

Sei $P(T) \in \mathbb{R}[T]$. Man zeige (unter Verwendung von **Ü30**):
a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{P(\lambda)} = P(\overline{\lambda})$.
b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, so auch $\overline{\lambda}$.
c) Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist $(T - \lambda)(T - \overline{\lambda})$ ein Polynom in $\mathbb{R}[T]$ ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$.
d) $P(T) \in \mathbb{R}[T]\backslash\{0\}$ läßt sich (bis auf Vertauschung der Nullstellen) eindeutig schreiben als

$$P(T) = c \cdot \prod_{i=1}^{k} (T - \lambda_i)^{n_i} \cdot \prod_{j=1}^{l} Q_j(T)^{m_j}$$

für $c \in \mathbb{R}^*, k, l \in \mathbb{N}$, $n_i, m_j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, paarweise verschiede $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, sowie paarweise verschiede quadratische normierte Polynome $Q_1, \ldots, Q_l \in \mathbb{R}[T]$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$.

Aufgabe H42 Für die folgenden Matrizen $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ führe man folgende Schritte aus:
a) Man berechne das charakteristische Polynom, bestimme dessen Nullstellen in K und deren Vielfachheiten.
b) Man berechne die Eigenräume zu den Eigenwerten in K.
c) Sofern dies möglich ist, finde man eine Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $C^{-1}AC = D$.

i) $K = \mathbb{Q}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $K = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$